

Transferencia de materia en Sistemas Binarios Cerrados

Parte I

J. ZOREC

Instituto de Astronomía y Física del Espacio -
Buenos Aires, Argentina.

Abstract: An insight of the distribution of the distribution of the transferred material in a close binary system is obtained around the receiving mass star.

Introducción.

Con el presente análisis se quiere dar una descripción aproximada del mecanismo de formación de estructuras anulares en torno de la estrella que denominaremos receptora de masa en un sistema binario con transferencia de material. La solución de tales problemas requiere un planteo desde el punto de vista hidrodinámico, tal como fuera sugerido previamente por Prendergast (1960).

Se considera que el movimiento del gas de transferencia no sólo se debe al movimiento orbital, como fuera tratado por Sobouti (1970), sino además a la existencia de una fuente (no necesariamente localizada en un punto) y un potencial gravitatorio debido a los miembros de la binaria.

Debido a la complejidad que significa tratar analíticamente las ecuaciones que describen el movimiento de las corrientes gaseosas, se optó por simplificar conceptualmente el problema, es decir, considerar este movimiento constituido por una parte debida al movimiento orbital de la binaria y por otra debida a la existencia de una fuente y un potencial gravitatorio.

Si los anillos se forman próximos a la superficie de la estrella receptora, es interesante analizar las condiciones de formación de tales estructuras sólo en la superficie de ésta. Con esto la segunda parte constitutiva del movimiento de las corrientes gaseosas puede representarse por adecuadas condiciones de contorno que simplifican notablemente el problema. Este se transforma en uno de fuentes y sumideros, adoptando en consecuencia una característica esencialmente cinemática.

Ecuaciones de Movimiento.

Las ecuaciones de momentos y continuidad para un régimen estacionario que se adoptaron son:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} + 2 \bar{\omega} \Lambda \bar{\mathbf{v}} + \bar{\omega} \Lambda (\bar{\omega} \Lambda \mathbf{r}) = \\ = - \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} P - \bar{\nabla} \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

$$\bar{\nabla} (\rho \bar{\mathbf{v}}) = 0 \quad (2)$$

donde los símbolos tienen el siguiente significado, Ω potencial gravitatorio de la binaria; $\bar{\mathbf{r}}$ vector posición; $\bar{\mathbf{v}}$ vector velocidad; $\bar{\omega}$ vector de rotación del sistema; P presión; ρ densidad.

Aquí las ecuaciones están referidas a un sistema de referencia centrado en el centro de gravedad de la binaria. El eje x va dirigido positivamente de la estrella 1 (receptora) a la estrella 2 (emisora); el eje z es normal al plano orbital. Se utilizarán además otros dos sistemas cartesianos dextrógiros centrados respectivamente en los centros de las estrellas. Sus ejes x van dirigidos positivamente hacia el centro de gravedad y los ejes z también son normales al plano orbital. La transformación entre estos sistemas de coordenadas se establece con:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \text{ sen } \theta_1 \cos \varphi_1 = A - r_2 \text{ sen } \theta_2 \cos \varphi_2 = \\ = A_1 + r \text{ sen } \theta \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\Gamma_1 \cos \theta_1 = - r_2 \cos \theta_2 = r \cos \theta \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \text{ sen } \theta_1 \text{ sen } \varphi_1 = r_2 \text{ sen } \theta_2 \text{ sen } \varphi_2 = \\ = r \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi \end{aligned}$$

los subíndices indican sistemas centrados en una u otra estrella, además se tiene: A distancia entre los centros estelares; A_1 distancia de la estrella 1 al baricentro y A_2 distancia de la estrella 2 al baricentro.

$$A = A_1 + A_2$$

Dada la descripción particular que se desea dar al problema, implica que el fluido deberá cumplir sólo condiciones cinemáticas de contorno. Si además se su-

pone que las velocidades son uniformes en las superficies estelares, se logra inmediatamente un fluido irrotacional:

$$\overline{\nabla} \wedge \overline{v} = 0 \quad (4)$$

Si se acepta que las ecuaciones son válidas únicamente en la zona donde no se producen cambios apreciables en el fluido, como ser la inevitable discontinuidad que se produce en la superficie de la estrella receptora, debido a que como se verá el fluido en esa zona tiene un comportamiento supersónico, se puede eventualmente adoptar el régimen de incompresibilidad:

$$\rho = \text{constante} \quad (5)$$

La solución del movimiento del material transferido, surgirá como se ve de (2) y (4) de un potencial de velocidades, para el cual se adoptó un formalismo completamente similar al utilizado por Sobouti.

Definiendo:

$$\overline{v} = -\overline{\nabla} \Phi - \overline{\omega} \wedge \overline{r} \quad (6)$$

con las ecuaciones (1), (2), (4) y (5) se obtiene:

$$\overline{\nabla}^2 \Phi = 0 \quad (7)$$

$$P = \rho \cdot f(\overline{r}, \Phi, \Omega) \quad (8)$$

Como se puede ver Ω sólo interviene en la expresión de P . Esto se debe a la forma particular de definir Φ y ésta procede de la manera conceptualmente simplificada de considerar el movimiento de las corrientes gaseosas. La ecuación (8) describe esencialmente el comportamiento de la temperatura para el caso de un gas ideal, pero lo hace en forma insuficiente pues no se ha utilizado en el cálculo ningún mecanismo adecuado que tenga en cuenta el transporte de energía. Esto se constituye en una limitación del trabajo.

Si bien en (6) no se aprecia ningún efecto dinámico, éste estará contemplado estimativamente en las condiciones de contorno.

Formalismo.

Se define:

$$\Phi = \omega (\Phi_1 + \Phi_2) \quad (9)$$

donde las Φ_i representan las contribuciones al potencial respectivamente de ambas estrellas y además satisfacen:

$$\overline{\nabla}^2 \Phi_i = 0 \quad (10)$$

Se imponen las siguientes condiciones de contorno:

$$U_i = -(\overline{\nabla} \Phi + \overline{\omega} \wedge \overline{r}) \cdot \overline{n}_i \quad (11)$$

donde los \overline{n}_i son los vectores unitarios normales a las superficies de las estrellas. En esta expresión $U_2 > 0$, depende de las propiedades emisivas de material de la estrella y $U_1 = U_1(\Omega_1) < 0$ es función del potencial (atractivo) esencialmente de la estrella receptora.

La expresión (11) se transforma en:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \overline{r}_1} \Big|_{r_1=a_1} &= \frac{U_1}{\omega} - A_1 \cos \theta_1 \\ -\frac{\partial \Phi_2}{\partial \overline{r}_2} \Big|_{r_2=a_2} &= \frac{U_2}{\omega} + A_2 \cos \theta_2 \quad (12) \\ -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \overline{r}_2} \Big|_{r_2=a_2} &= 0 \\ -\frac{\partial \Phi_2}{\partial \overline{r}_1} \Big|_{r_1=a_1} &= 0 \end{aligned}$$

donde $\omega = |\overline{\omega}|$ y a_i son los radios de las estrellas consideradas esféricas.

El problema consiste ahora simplemente en resolver las ecuaciones de Laplace (10) con soluciones convergentes para $r_i \rightarrow \infty$ de manera que satisfagan las condiciones de contorno (12). Se procede por aproximaciones sucesivas, de modo que cada nueva aproximación de cada una de las contribuciones al potencial Φ satisfaga alternativamente una de las condiciones de contorno que le corresponde. En las derivadas con respecto a los radio-vectores se utilizan las transformaciones (3), las que se expanden hasta los armónicos esféricos de segundo orden. La expresión del potencial total hasta los armónicos esféricos de segundo orden y utilizando tres iteraciones es:

$$\Phi = \sum_{i=1}^2 \left(\gamma_1^{(1)} \cdot \frac{1}{r_1} + \gamma_i^{(2)} \cdot \frac{1}{r_1^2} \cos \theta_i + \gamma_i^{(3)} \cdot \frac{1}{r_1^2} \operatorname{sen} \theta_i \cos \varphi_i + \right. \\ \left. + \gamma_i^{(4)} \cdot \frac{1}{r_1^2} \cdot \operatorname{sen} \theta_i \cos \theta_i \cos \varphi_i \right) \quad (13)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(1)} &= \omega a_1^2 (k_0^{(1)} + K_0^{(2)} + k_0^{(3)}) \\ \gamma_2^{(1)} &= \omega a_2^2 (K_0^{(1)} + k_0^{(2)} + K_0^{(3)}) \\ \gamma_1^{(2)} &= \omega \frac{a_1^3}{2} (k_1^{(1)} + K_1^{(2)} + k_1^{(3)}) \\ \gamma_2^{(2)} &= \omega \frac{a_2^3}{2} (K_1^{(1)} + k_1^{(2)} + K_1^{(3)}) \\ \gamma_1^{(3)} &= \omega \frac{a_1^3}{2} (K_2^{(2)} + k_2^{(3)}) \\ \gamma_2^{(3)} &= \omega \frac{a_2^3}{2} (k_2^{(2)} + K_2^{(3)}) \\ \gamma_1^{(4)} &= \omega \frac{a_1^4}{3} (K_3^{(2)} + k_3^{(3)}) \\ \gamma_2^{(4)} &= \omega \frac{a_2^4}{3} (k_3^{(2)} + K_3^{(3)}) \end{aligned} \quad (14)$$

$$k_0^{(1)} = U_1 / \omega$$

$$k_1^{(1)} = -A_1$$

$$k_0^{(2)} = k_0^{(1)} \cdot \frac{a_1^2 a_2}{R_2^3}$$

$$k_1^{(2)} = -\frac{1}{2} \cdot k_1^{(1)} \cdot \frac{a_1^3}{R_2^3} \cdot \left(3 \frac{a_2^2}{R_2^2} - 1 \right)$$

$$k_2^{(2)} = k_0^{(1)} \cdot \frac{a_1^2 A}{R_2^3} \cdot \left(3 \frac{a_2^2}{R_2^2} - 1 \right)$$

$$k_3^{(2)} = -\frac{3}{2} \cdot k_1^{(1)} \cdot \frac{a_1^3 a_2 A}{R_2^5} \cdot \left(5 \frac{a_2^2}{R_2^2} - 2 \right) \tag{15}$$

$$k_0^{(3)} = \frac{a_2^2 a_1}{R_1^3} \cdot \left(k_0^{(2)} + \frac{3}{2} k_2^{(2)} \cdot \frac{a_2 A}{R_1^2} \right)$$

$$k_1^{(3)} = -\frac{1}{2} k_1^{(2)} \cdot \frac{a_2^3}{R_1^3} \cdot \left(3 \frac{a_1}{R_1} - 1 \right) - \frac{1}{3} k_3^{(2)} \cdot \frac{a_2^4 A}{R_1^5} \cdot \left(5 \frac{a_1^2}{R_1^2} - 1 \right)$$

$$k_2^{(3)} = k_0^{(2)} \cdot \frac{a_2^2 A}{R_1^3} \cdot \left(3 \frac{a_1^2}{R_1^2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot k_2^{(2)} \cdot \frac{a_2^3}{R_1^3} \cdot \left[3 \frac{A^2}{R_1^2} \left(5 \frac{a_1^2}{R_1^2} - 1 \right) - 3 \frac{a_1^2}{R_1^2} + 1 \right]$$

$$k_3^{(3)} = \frac{1}{3} \cdot k_3^{(2)} \cdot \frac{a_2^5}{R_1^5} \cdot \left(5 \frac{a_1^2}{R_1^2} - 2 \right) - \frac{3}{2} \cdot k_1^{(2)} \cdot \frac{a_2^3 a_1 A}{R_1^5} \cdot \left(4 \frac{a_1}{R_1} - 1 \right) - \frac{35}{3} \cdot k_3^{(2)} \cdot \frac{a_2^4 a_1^3 A^2}{R_1^9}$$

$$R_2^2 = A^2 + a_2^2$$

$$R_1^2 = A^2 + a_1^2$$

Para los K_i^j se obtienen exactamente las mismas expresiones, sólo que en los coeficientes a_i y R_i , deben intercambiarse los subíndices 1 y 2 y hay que tener en cuenta que $K_1^{(1)} = +A_2$.

La expresión (6) se puede transcribir para las proximidades de la estrella receptora de la siguiente forma:

$$v_{r_1} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r_1} - A_1 \cos \theta_1$$

$$v_{\theta_1} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \cdot \frac{1}{r_1} + A_1 \omega (\sin \theta_1 - \cos \varphi_1) \tag{16}$$

$$v_{\varphi_1} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{1}{r_1 \sin \theta_1} + A_1 \omega \cos \theta_1 \sin \varphi_1$$

Las cantidades definidas en (16) pueden visualizarse en la figura 1.

En particular interesa el valor de v_{φ_1} para $r_1 \cong a_1$ que en este caso adopta la siguiente forma:

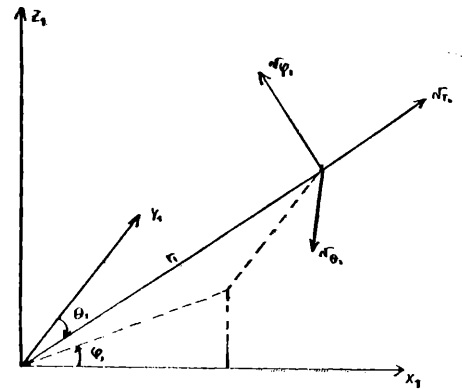


Figura 1

$$v_{\varphi_1} (r_1 \cong a_1) = -D \left(1 + \frac{E}{D} \cos \theta_1 \right) \sin \varphi_1 \tag{17}$$

donde:

$$D = \frac{1}{R_1^3} \left[\gamma_2^{(3)} \left(1 - 3 \frac{A^2}{R_1^2} \right) - \gamma_2^{(1)} \cdot A \right] - \frac{\gamma_2^{(3)}}{a_1^3}$$

$$\frac{a_1}{R_1^3} \left[3 \gamma_2^{(2)} \cdot A + \gamma_2^{(4)} \cdot \left(5 \cdot \frac{A^2}{R_1^2} - 1 \right) \right] - \frac{\gamma_2^{(4)}}{a_1^4}$$

Conclusión

Es natural, que la condición para la formación de algún tipo de estructura gaseosa en torno de la estrella receptora y en el plano de la órbita, sea $v_{\varphi_1} < 0$. Esto se cumple si simultáneamente:

$$1 + \frac{E}{D} \cos \theta_1 > 0 \quad \text{y} \quad D > 0$$

o

$$1 + \frac{E}{D} \cos \theta_1 < 0 \quad \text{y} \quad D < 0.$$

En el primero de los casos, la primera de las condiciones se cumple normalmente si $\frac{E}{D} < 1$, pero puede demostrarse observando los órdenes de magnitud en términos de las a_i medidas en unidades de A que entran en juego en las expresiones (18), que esta exigencia conduce a la misma conclusión que si exigimos únicamente $D > 0$. Esto equivale a decir que debe cumplirse:

$$\gamma_1^{(4)}/R_1^3 < -\gamma_1^{(3)}/a_1^3 \quad (18)$$

colocando los valores correspondientes resulta:

$$U_1 < -U_2 \cdot \frac{R_2^3}{2 a_1^2 a_2} \cdot \left(3 \frac{a_1^2}{R_1^2} - 1 \right) \quad (19)$$

Esta no es más que una condición cinemática, pues no revela ninguna dependencia de U_1 con los A_i que reflejaría la influencia de las masas estelares.

En el segundo de los casos, la primera relación no se verifica para todos los valores posibles de θ_1 , lo cual revela la imposibilidad de mantener un valor $v_{\varphi_1} < 0$, por otro lado $D < 0$ implica $U_1 > 0$, o sea la existencia de una presión repulsiva hacia el material de transferencia. Si esta presión repulsiva es interpretada en términos de una presión de radiación, la temperatura efectiva del objeto receptor será por lo menos del orden de:

$$T_{\text{eff}} \geq \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{c}{\sigma} \cdot \frac{G M_1 \rho_1}{a_1} \right)^{1/4} \quad (20)$$

donde c es la velocidad de la luz; σ la constante de Stefan-Boltzman; G constante de la gravitación y ρ_1 la densidad del material acumulado en la superficie de la estrella. Los elevados valores numéricos que surgen de (20) con parámetros característicos en los problemas de transferencia de masas, revelan que tales estructuras tienen dificultades de formarse en torno de objetos muy tempranos.

Los resultados presentados hasta ahora pueden tener mayor peso si se logra explicitar la relación:

$$U_1 = U_1(\Omega_1)$$

donde Ω_1 es el potencial gravitatorio de la estrella receptora. Por intermedio de (19) se tendría una condición de formación de estructuras gaseosas en el plano orbital, que vincularía las masas de las estrellas, la geometría y las condiciones iniciales de movimiento del problema.

Aunque en este análisis se tuvo en cuenta el régimen de un fluido incompresible, los resultados obtenidos son aprovechables para deducir la tendencia del movimiento de un gas compresible, en las zonas en las que se suponen que no se producen discontinuidades en el fluido. Numéricamente se ha demostrado que éstas se producen muy próximas a la superficie de las receptoras, aunque sólo resulten representadas por sus potenciales, Biermann (1971).

El teorema de Bernoulli válido para toda la extensión del gas, pues se ha utilizado la aproximación de un fluido potencial es:

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} (\bar{\omega} \Lambda \bar{\Gamma})^2 + \Omega + \int \frac{dP}{\rho} = \text{cte.} \quad (21)$$

En su mayor extensión el fluido se comporta adiabáticamente, Biermann (1971). Con esta aproximación y utilizando (16), se obtiene con la (21) la variación angular de la densidad:

$$\rho = \rho_0 (1 - F(\theta_1, \varphi_1)) \quad (22)$$

$F(\theta_1, \varphi_1)$ está dada esencialmente por la diferencia de la energía cinética y potencial cinético, calculados para dos pares de valores de θ_1 y φ_1 .

Se verifica que $F(\pi/2, 0) = F(0, \pi/2) = 0$.

Con $F(\theta_1, \varphi_1)$ se pueden inferir con cierta aproximación, algunas características ci-

nemáticas del material que incide en la receptora y la concentración del mismo. Para la zona de flujo máximo (mancha caliente), identificada aproximadamente por $\theta_1 \sim \pi/2$, no teniendo en cuenta armónicos esféricos superiores al segundo orden y conservando la desigualdad $E < D$, se tiene:

$$F(\varphi_1) \cong \left(\frac{1-\gamma}{c^2} \right) \left[-BC(1-\cos\varphi_1) + \frac{1}{2} (c^2 - a_1^2 \omega^2) (1 - \cos^2 \varphi_1) \right] \quad (23)$$

Igualmente para $\varphi_1 \sim \pi/2$ se tiene la expresión:

$$F(\theta_1) \cong \left(\frac{\gamma-1}{c^2} \right) B^2 \sin^2 \theta_1 \quad (24)$$

donde c representa a la velocidad del sonido y

$$C = A_1 \omega$$

$$B \cong A_1 \omega + \frac{\gamma_1^{(2)}}{a_1^3} - \frac{\gamma_2^{(2)}}{R_1^3}$$

Observando los valores de los $\gamma_i^{(i)}$ en (14) y (15), se ve inmediatamente que es $B \sim C$.

El máximo valor permisible de F para que exista una tendencia de formación de estructuras coplanares al plano orbital es $F_{\max} = 1$. Esto implica que en (23) transcrita para una región próxima al plano orbital:

$$F(\varphi_1) \approx Z \frac{(\gamma-1)}{c^2} a_1^2 \omega^2 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \quad (25)$$

sea $a_1 \omega \sim c$. Aunque esta condición es algo restrictiva en términos de a_1 y ω , su

mayor importancia reside en el hecho de que para tener una concentración hacia el plano orbital, implique que el fluido que forma la estructura circumestelar adquiera características sónicas, eventualmente supersónicas.

También con carácter estimativo, de (22) y (25 se obtiene:

$$\rho \sim \text{cte.} \cdot \cos^2 \frac{\varphi_1}{2} \quad \theta_1 \sim \pi/2$$

lo cual habla de una elevada concentración hacia el plano de la órbita.

Utilizando la misma argumentación hasta aquí empleada, se ve que con (22) y (24), la distribución de la densidad para $\varphi_1 \sim \pi/2$ es aproximadamente:

$$\rho \sim \text{cte.} \cdot \cos^2 \theta_1$$

En el presente trabajo se ha supuesto que la fuente emisora del gas era extensa y que cubría toda la superficie de la estrella emisora. La emisión se supuso uniforme en toda su extensión. De todas maneras la zona del primer punto de Lagrange ofrece a la presión del fluido a transferir un balance mínimo con el potencial del sistema. Como L_1 está próximo al plano orbital y representa ser un punto preferencial de emisión de gas, la concentración puede llegar a ser superior a la que se ha encontrado en este tratamiento.

Con esto se a logrado demostrar que si se desea analizar en cierto detalle la estructura física de un anillo circumestelar, es suficiente emplear una descripción bidimensional.

REFERENCIAS

- Biermann, P. 1971, *Astron. & Astrophys.* 10, 205.
 Prendergast, K. H. 1960, *Ap. J.* 132, 164.
 Sobouti, Y. 1970, *Astron. & Astrophys.* 5, 149.